MAI 1 – 7. cvičení „písemné" (náhradní za 2.4. 2020)

1. Ze zadání příkladů pro cvičení 7. „necháme" úlohy o spojitosti funkce jedné proměnné – příklady 2. – 5. – jako domácí úkol (jako inspiraci k „domácímu" přemýšlení, řešení opět „za čas" pošlu). Budeme dnes na cvičení spíše derivovat. A aspoň příklad pro ni:

Je dána funkce $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$ pro $|x|<1$,

$f(x) = 0$ pro ≥ 1.

Ukažte, že f je spojitá v R.

(i) pro $|x|>1$, tj. $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ je fce $f(x)$ konstantní 0, tj. je spojitá v každém bodě sjednocení $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, tj. (dle definice) je spojitá i na $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(ii) $x \in (-1,1)$: $f(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ je spojitá dle věty o spojitosti složené funkce:

$g(x) = -\frac{1}{1-x^2}$ je spojitá v $(-1,1)$ ($1-x^2$ je spojitá a nenulová v $(-1,1)$, pak AS – (aritmetika spojitosti))

a vnější funkce je e^y – fce spojitá v R

(iii) zbývá tedy vyšetřit spojitost funkce v bodech $x = \pm 1$; díky sudosti zadané funkce stačí pro $x=1$ (v $x=-1$ „stejné") funkce $f(x)$ bude spojitá v bodě $x=1$, když (dle definice) bude $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$ (ze zadání fce f),

tj. zde (stačí): $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} e^{-\frac{1}{1-x^2}} = 0$? (*)

$$\left(\text{pro } \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} 0 = 0 \ \text{- zřejmé}\right)$$

a $\lim_{x\to 1-} e^{-\frac{1}{1-x^2}} \underset{\text{VOLSF}}{=} \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0$ - cbd.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{-1}{1-x^2} = \text{"}\frac{-1}{0+}\text{"} = -\infty$$

<u>Tedy, z (i)(ii)(iii) plyne, že f je spojitá v každém bodě $x\in R$, tedy, f je spojitá fce v R (co jsme měli ukázat)</u>

<u>2. Derivace funkce :</u> $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

1. <u>Dokažte, že platí „tabulkové" vzorce</u> (pomocí definice) (omlouvám se, nemám psát a říkat „tabulkové")

a) $\underline{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\ , \ x\neq 0}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'_{x=x_0} \underset{\text{def.}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{x_0-x}{x\cdot x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{x\cdot x_0} =$$

$x_0\neq 0$

$$= -\frac{1}{x_0^2}\ ,\ x_0\neq 0$$

nebo :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} =$$

$x \neq 0$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}, \ (x\neq 0)$$

b) $(\sin x)' = \cos x, \ x \in R$

Poznámka: důkaz tohoto „vzorce" je v přednášce 7 v „nepovinném" rámečku podán z definice e^x (pomocí mocninné řady) derivováním mocninných řad – tak to je to zpravidla v literatuře – pokud ale „věříme", že $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (a toto lze opět dokázat z definice sinu řadou), pak už derivaci sinu lze určit v $x \in R$:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h} =$$

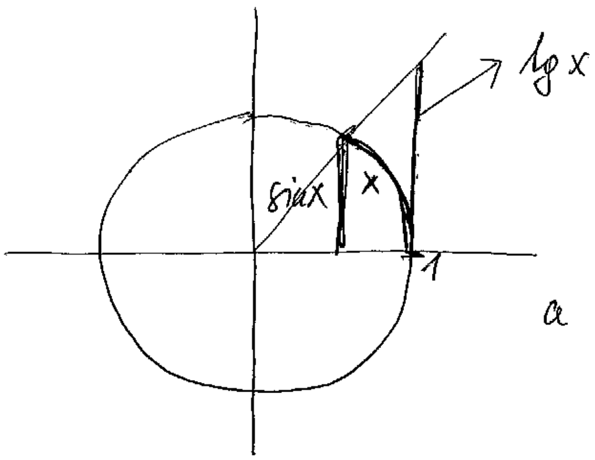
$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\cdot\sin x + \frac{\sin h}{h}\cdot\cos x\right) \underset{AL}{=} 0 + 1.\cos x = \cos x$$

ale $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = 0$ (známe ze cvičení)

a $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$

A jiště poznámka:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ je i „vidět" z „intuitivní" definice fce sinus (ze střední školy) pomocí „jednotkové kružnice":



(x – úhel ($x > 0$) v obloukové míře)

pak 1) $\sin x < x$

2) $x < \operatorname{tg} x \left(= \frac{\sin x}{\cos x}\right)$

a z 1) a 2) pak dostaneme:

$$\cos x \underset{(2)}{<} \frac{\sin x}{x} \underset{(1)}{<} 1$$

a jelikož $\cos x$ je fce spojitá v 0, je limita $\lim\limits_{x \to 0(+)} \cos x = 1$, a tedy dle VOS je $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$; fce $\frac{\sin x}{x}$ je sudá, tj. i $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$!

c) podobně, když z definice řady umíme ukázat, že $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (u „nás" pro $x \to 0+$, také lze exponenciálu definovat „axiomaticky", pak je to jeden z axiomů), snadno spočítáme, že $(e^x)' = e^x$ v R:

$$\underline{(e^x)'} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x\cdot(e^h-1)}{h} \underset{AL}{=} \underline{e^x}$$

d) $\underline{(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ pro } x>0}$:

(i) lze užít věty o derivaci inverzní funkce:

$$f^{\langle -1\rangle\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{\langle -1\rangle}(x))}$$

(předpokládáme, že „vše je definováno")

Pak $(\ln x)' = \dfrac{1}{e^{(\ln x)}} = \dfrac{1}{x}$, $x>0$

(ii) z definice (opět cvičení „na" definici derivace a „výpočet limit"):

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} \underset{x>0}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\text{VLSF} \to 1} \cdot \frac{1}{x} \underset{AL}{=} 1\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$ (opět – naše známá limita)

$\frac{h}{x} = t$, pro $h\to 0$ i $t\to 0$

e) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$

dle věty o derivování inverzní fce

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) \overset{*}{=}$$

pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \; (= \mathcal{H}(\operatorname{arctg}))$ je $\cos^2 t = \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t}$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$! („vyšlo")

(derivace arctg x „obráceně" čtená bude užitečná při integrování)

2. Výpočet derivace funkce

Protože nevím, jak jste na tom „s výpočtem derivací", ukážu zde základní „postupy podle pravidel derivování", a pokud byste chtěli více příkladů s řešeními podrobnějšími, napište mi, prosím, zpracuji a napíšu pro vás příkladů více.

„Pravidla" (předpoklady, že to, co je napsáno, existuje – pro jednoduchost)

(1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$; $(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$

(2) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, , $\left(f^{\langle -1\rangle}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{\langle -1\rangle}(x)\right)}$ (5)

(4) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

<u>a příklady:</u> (T - tabulka derivací)

$\underline{\left(\frac{1}{x} + 4x^2\right)'} \underset{(1)}{=} \left(\frac{1}{x}\right)' + 4(x^2)' \underset{T}{=} -\frac{1}{x^2} + 4.2.x = \underline{-\frac{1}{x^2} + 8x}$

$x \neq 0$

$\underline{(x - 2\operatorname{arctg} x)'} \underset{(1)}{=} (x)' - 2(\operatorname{arctg} x)' \underset{T}{=} 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}$,

$x \in R$

$\underline{(x^2 \cdot \sin x)'} \underset{(2)}{=} (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$, $x \in R$

$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' \underset{(3)}{=} \frac{(x^2+1)'(x^2-1) - (x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1).2x}{(x^2-1)^2} =$

$= \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$, $x \neq \pm 1$

<u>a nyní důležité - umět "derivovat složenou funkci":</u>

Př. $(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}$, „obecněji"

$\left(e^{g(x)}\right)' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

nebo další „příklady" (stále předpokládáme v obecných návodech, že to, co je napsáno, existuje a jde „vše, co chceme")

$$((g(x))^n)' = n(g(x))^{n-1} \cdot g'(x), \quad (\sin(g(x)))' = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(\ln(g(x)))' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x), \quad (\operatorname{arctg}(g(x)))' = \frac{1}{1+g^2(x)} \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{1}{(g(x))^n}\right)' = \left((g(x))^{-n}\right)' = -n(g(x))^{-n-1} \cdot g'(x)$$

(a další „návody" vymyslete si sami)

<u>Tedy příklady:</u>

1) $\underline{\left(\frac{2}{(x^3-2)^2}\right)'} =$ lépe, než derivovat podíl

$$2\left((x^3-2)^{-2}\right)' \underset{(4)}{=} 2\cdot(-2)(x^3-2)^{-3}(x^3-2)' =$$

$$= -4(x^3-2)\cdot 3x^2 = -12x^2(x^3-2)$$

$x \neq \sqrt[3]{2}$

2) $\underline{\left(e^{-3x^2} \cdot \cos(\ln(2x))\right)'} \underset{(2)(4)}{=} \left(e^{-3x^2}\right)' \cos(\ln(2x)) +$

$x > 0$

$$+ e^{-3x^2} \cdot \left(\cos(\ln(2x))\right)' \overset{*}{=}$$

zde potřebujeme: $\underline{(f(g(h(x))))'} \underset{(4)}{=} f'(g(h(x))) \cdot (g(h(x)))' \underset{(4)}{=}$

(a zkuste „zobecnit")

$$= \underline{f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)}$$

$$= e^{-3x^2}(-6x)\cos(\ln(2x)) + e^{-3x^2}\left(-\sin(\ln(2x))\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2\right)$$

$$= e^{-3x^2}\left(-6x\cos(\ln(2x)) - \frac{\sin(\ln(2x))}{x}\right), \quad x>0$$

(úpravy nedeláme až „dokonale" – zatiaľ to nepotrebujeme)

$$\left(\cos(\ln(2x))\right)' = -\sin(\ln(2x))\cdot(\ln(2x))' = -\sin(\ln(2x))\cdot\frac{(2x)'}{2x}$$

3) $$\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2\right)' = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} =$$

$x \neq 1$

$$= -4\,\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

4) $$\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+x^2)'\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x\in R$$

5) $$\left(e^{\frac{1}{x}}-x\right)' = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' - (x)' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - 1$$

$x \neq 0$

6) $$f(x)^{g(x)} \underset{\text{def.}}{=} e^{g(x)\ln(f(x))}, \text{ tedy}$$
$(f(x)>0)$

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln(f(x))}\right)' \underset{(4)(3)}{=}$$

$$= e^{g(x)\ln(f(x))}\left(g(x)\ln(f(x))\right)' = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

tedy zde:

$$\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}\right)' = \left(e^{x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}\right)' = \left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)' =$$

$$= \left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}\left(1\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{x}}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)\right) =$$

$$= \left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) - \frac{3}{x+3}\right), \quad x\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$$

A nyní „nebezpečná" derivace $(\sqrt{x})'$:

$f(x)=\sqrt{x}$ je definována v $\langle 0,+\infty)$, ale (tabulka derivací)

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x\in(0,+\infty);$$

a jak je to s $f'_+(0)$?

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}} = „\frac{1}{0+}" = +\infty \text{ –}$$

– tj. „$\sqrt{\ }$" nemá v 0+ vlastní derivaci – nebezpečí pro $(\sqrt{f(x)})'$!

7) $$\underbrace{(\cos\sqrt{x})'}_{D_f=\langle 0,+\infty)} \underset{(4)}{=} -\sin(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})' = -\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ! \ (*)$$

ale jen: $x \in (0,+\infty)$

a zbývá pro splnění úkolu: „najít, kde existuje derivace" – a to zatím neumíme pro: $f'_+(0) = ?$

Zatím „umíme" jen použít definici (v budoucnu to „vylepšíme"):

Je-li $f(x) = \cos\sqrt{x}$, pak

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} = \text{„}\frac{0}{0}\text{“}$$

(výpočet limity – rozšíření)

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\cos^2\sqrt{x}-1}{x\,(\cos\sqrt{x}+1)} \underset{\substack{\text{VLSF} \\ \sqrt{x}=t \\ x\to 0+ \Rightarrow t\to 0+}}{=}$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{\cos^2 t-1}{t^2}\cdot\frac{1}{\cos t+1} = \lim \underbrace{\frac{-\sin^2 t}{t^2}}_{\to -1}\cdot\frac{1}{\cos t+1} \underset{\text{AL}}{=} -\frac{1}{2} \ !$$

tedy, f má derivaci (oboustrannou) v $(0,+\infty)$, viz $(*)$,

a $f'_+(0) = -\frac{1}{2}$.

8) $\left(\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}\right)' = ?$

f je definovaná v $\mathcal{D}f = (-\infty,-2) \cup \langle 3,+\infty)$,

v $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$ lze derivovat dle pravidel : (4), (3)

$$\left(\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}\;\frac{5}{(x+2)^2}$$

a $f'_+(3) = \lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{1}{\sqrt{(x+2)(x-3)}} = +\infty$

(zde pro $x \in (3,+\infty)$ je $\sqrt{\frac{x-3}{x+2}} = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}$)

9) $f(x) = \sqrt{x}\,\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; $\mathcal{D}f = \langle 0,+\infty)$

$$f'(x) \underset{(2)(4)}{=} \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \frac{1}{2(1+x)}\,, \quad x \in (0,+\infty)$$

a $f'_+(0) \underset{\text{def.}}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} =$

$(f(0)=0)$

$$\underset{\substack{\text{VLSF}\\ \sqrt{x}=t\to 0+}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 1$$

(analogie z $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$)

Poznámka: další pro derivování „nebezpečná" funkce je $f(x) = \arcsin x$. Zkuste si ukázat, že podle „tabulkové informace" $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$ je jistě $(\arcsin x)'_{x=1-} = (\arcsin x)'_{x=-1+} = +\infty$.

A můžete si zkusit i „těžší" příklad – zderivovat, tedy,

$f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ – zde budou problémy s $f'(x)$ v bodech $x=+1$ a $x=-1$ (dle poznámky nahoře „asi")

A nyní nezaručené řešení – „něco" z příkladu 3:
(a pak zkuste sami jako „DÚ" další – zadané příklady)
ale můžete i dobrovolné příklady navíc)

3a) Vyšetřete existenci a hodnotu derivace funkce

$f(x) = |x|$ a $g(x) = |x^3|$ v bodě $x = 0$:

$$f'_{\pm}(0) \underset{\text{def.}}{=} \lim_{x\to 0\pm} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \operatorname{sgn} x = \pm 1 \overset{*}{\Rightarrow}$$

($f'(x) = 1$, $x \in (0,+\infty)$, $f'(x) = -1$ pro $x \in (-\infty,0)$)

„stejně" $g'(x) = 3x^2$ pro $x \in (0,+\infty)$, $g'(x) = -3x^2$, $x \in (-\infty,0)$

$\overset{*}{\Rightarrow}$ f nemá derivaci v bodě 0 (oboustrannou)
(neboť $f'_+(0) \neq f'_-(0)$)

ale: $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x^3|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \frac{|x|}{x} =$ „$0 \cdot$ omezená" $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{g'(0) = 0}$

(geometricky – tzv. „na" přednášce 7. – graf funkce $g(x)$ má v bodě 0 (tedy $g(0)=0$) tečnu – osu x !
a stejně tak i $h(x) = x^3$ – $h'(0) = 3x^2\big|_{x=0} = 0$!
To bude asi „zdroj" k odpovědi na otázku v příkladu 3a)

A vyzkoušejte „stejně" i pro jednu z dalších funkcí.

3b) $\underline{f(x) = \frac{1-\cos x}{x}, \; x \neq 0 \; ; \; f(0) = 0}$

(i) f je spojitá v bodě $x_0 = 0$ (tzv. nespojitá, ve cvičení 6)

ale i $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1+\cos x} \underset{AL}{=} 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \; , \; f(0) = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{f \text{ je spojitá v bodě } 0.}$

(ii) $\underline{f'(0)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \underline{\frac{1}{2}}$ (analog. výpočet limity)

$$\underset{x\neq 0}{f'(x)} \underset{(3)}{=} \frac{\sin x \cdot x - (1-\cos x)\cdot 1}{x^2} = \Bigg(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} \Bigg)$$

a odtud již snadno: $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2}$, tj. f' je spojitá v $x_0 = 0$

Poznámka:

1) Kdybychom ale nejprve spočítali $f'(x)$ i $f'(0)=\frac{1}{2}$, pak už bychom věděli, že f je spojitá v bodě 0 (a nemuseli to počítat) – viz důležitá věta (předn. 7)

tj. $f'(a) \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ je spojitá v bodě a

(analog. pro derivace jednostranné a jednostrannou spojitost f v bodě a)

2) v našem příkladu tedy platí:

„ $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ " –

a toto za jistých předpokladů platí obecně a umožňuje to počítat někdy jednodušeji derivace ve „spojných" bodech.

c) (ii) $\underline{f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ x \neq 0 \text{ a } f(0)=0}$

1) $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{\text{"}}{=} \text{„nula} \cdot \text{omezená"} = 0,$$

tj. f je spojitá v bodě $x_0 = 0$

2) $$\underset{x\neq 0}{f'(x)} = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) \text{ nemá limitu v } x_0=0\ !$$

ale $$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad (\text{„}0 \cdot \text{omezená"}),$$

tedy zde: $\underline{f'(0) \text{ existuje ale neplatí, že } f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x)}$!!